Insegnamento: Analisi Matematica I

Docente: Prof. Paolo Vitolo
(vedi Curriculum del docente)

Lingua: Italiano

Contenuti:
Numeri reali. Funzioni e grafici.
Continuità e continuità uniforme. Limiti.
Principio di induzione. Successioni. Criterio di Cauchy.
Sottosuccessioni; teorema di Bolzano-Weierstrass.
Teorema di Heine-Cantor. Teorema di Weierstrass.
Derivata. Regole di derivazione; derivate delle funzioni elementari.
Derivata di una funzione monotona. Teorema di Fermat; teorema di Rolle.
Teoremi di Cauchy e Lagrange. Teorema di De L'Hôpital.
Studio di funzioni.
Integrazione secondo Riemann. Integrali generalizzati.

Testi di riferimento:
E. Giusti: Analisi Matematica I, Bollati Boringhieri.
E. Acerbi, G. Buttazzo: Primo corso di Analisi Matematica, Pitagora Editrice.
E. Giusti: Esercizi e Complementi di Analisi Matematica, vol. 1, Bollati Boringhieri.
G. Gilardi: Analisi Uno, McGraw-Hill

Obiettivi formativi:
Comprendere i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica.
Acquisire gli strumenti del calcolo differenziale e integrale per funzioni di una variabile reale.
Sapere risolvere alcuni tipi fondamentali di disequazioni.
Calcolare limiti di funzioni o di successioni.
Tracciare una rappesentazione qualitativa e quantitativa del grafico di una funzione.

Prerequisiti:
Alcune conoscenze di base di geometria piana. Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado.

Metodi didattici:
Gli obiettivi formativi saranno realizzati sia attraverso lezioni frontali sia attraverso esercitazioni.

Modalità di verifica dell'apprendimento:
Una prova scritta e una prova orale.

Programma esteso:
Assiomi dei numeri reali. Maggioranti e minoranti, massimo e minimo; estremo superiore ed estremo inferiore; principio dell'estremo superiore. I reali estesi e gli intervalli.
Radice *n*-esima di un numero reale; potenza ad esponente reale; i logaritmi.
Buon ordinamento dei numeri naturali; principio di induzione. Definizioni per ricorrenza.
Proprietà di Archimede. Parte intera di un numero reale.
Funzioni trigonometriche: seno, coseno e tangente; formule trigonometriche.
Valore assoluto; disuguaglianza triangolare.
Funzioni e grafici. Funzioni crescenti e funzioni decrescenti. Operazioni con le funzioni.
Inversa di una funzione; invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Funzioni trigonometriche inverse.
Densità dei razionali e degli irrazionali.
Continuità e continuità uniforme. Operazioni con le funzioni continue.

Disuguaglianza di Bernoulli. Disuguaglianze trigonometriche. Continuità delle funzioni elementari. Esempi di funzioni continue non uniformemente continue.
Intorni. Teorema della permanenza del segno. Punti di accumulazione e punti isolati. Teorema degli zeri; teorema dei valori intermedi.
Limite di una funzione in un punto unicità del limite. Operazioni con i limiti. Teorema dei carabinieri.
Limiti di restrizioni; limite destro e limite sinistro. Limiti delle funzioni monotone. Limite infinito; forme indeterminate. Limite di una funzione all'infinito.
Limite della composizione di due funzioni. Collegamento tra continuità e limiti di funzioni. Limiti fondamentali delle funzioni elementari.
Classificazione dei punti di discontinuità; Discontinuità delle funzioni monotone. Criterio di continuità per le funzioni monotone.
Successioni. Significato di "definitivamente" e di "frequentemente". Teorema della permanenza del segno e teorema del confronto per le successioni.
Caratterizzazione dei punti di accumulazione mediante le successioni. Collegamento tra limiti di funzioni e limiti di successioni.
Caratterizzazione delle successioni monotone. Costruzione del numero e. Limiti notevoli.
Sottosuccessioni; teorema di Bolzano-Weierstrass. Criterio di convergenza di Cauchy.
Massimo limite e minimo limite di una funzione. Caratterizzazione del limite mediante il massimo e il minimo limite. Massimo e minimo limite di una susccessione.
Confronto asintotico di funzioni. Notazione "o piccolo" e "o grande". Infinitesimi e infiniti.
Insiemi aperti e insiemi chiusi. Teorema di Weierstrass. Teorema di Heine-Cantor.
Punti di massimo e di minimo relativo. Caratterizzazione delle funzioni continue invertibili. Continuità dell'inversa di una funzione continua.
Definizione e significato geometrico di derivata; derivate successive. Funzioni differenziabili. Continuità delle funzioni differenziabili. Equivalenza tra derivabilità e differenziabilità.
Regole di derivazione; derivate delle funzioni elementari. Esempi di funzioni non derivabili.
Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Cauchy. Teorema di Lagrange.
Andamento di una funzione. Funzioni convesse e loro proprietà; punti di flesso. Asintoti. Studio di funzioni.
Teorema di De L'Hôpital e sue applicazioni.
Funzioni integrabili secondo Riemann; integrale di una funzione esteso a un intervallo. Esempio di funzione non integrabile.
Linearità dell'integrale. Integrale di una funzione non negativa. Monotonia dell'integrale. Criterio di integrabilità.
Integrabilità delle funzioni monotone. Integrabilità delle funzioni composte. Integrabilità delle funzioni continue. Integrabilità del prodotto di due funzioni integrabili.
Restrizioni ed estensioni di funzioni integrabili. Proprietà segmentaria dell'integrale.
Teorema della media; teorema della media generalizzato.
Integrale definito. Funzione integrale e sue proprietà. Teorema fondamentale del calcolo integrale.
Primitive di una funzione; l'integrale indefinito. Calcolo dell'integrale definito; esempi.
Integrali immediati. Metodi di integrazione indefinita. Integrazione delle funzioni razionali; formula di Hermite.
Integrazione per razionalizzazione.
Integrale in senso generalizzato: definizione ed esempi. Funzioni integrabili in senso generalizzato e funzioni sommabili. Criterio del confronto per la sommabilità. Criteri di sommabilità.
Esempio di funzione integrabile in senso generalizzato ma non sommabile.
Sviluppo di Taylor. Resto dello sviluppo di Taylor: forma di Peano e forma di Lagrange.
Forma integrale del resto dello sviluppo di Taylor.

Note:
Questo corso contribuisce principalmente a fornire allo studente le conoscenze di base di Analisi Matematica, a migliorare la capacità di fare dimostrazioni rigorose, e a comprendere le applicazioni di base della Matematica alle altre Scienze.