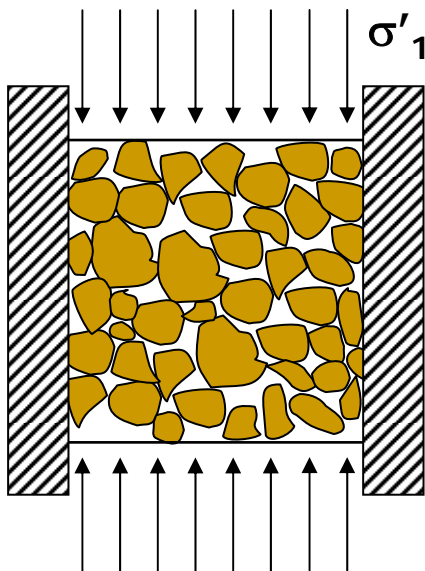


Compressione sferica

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$$

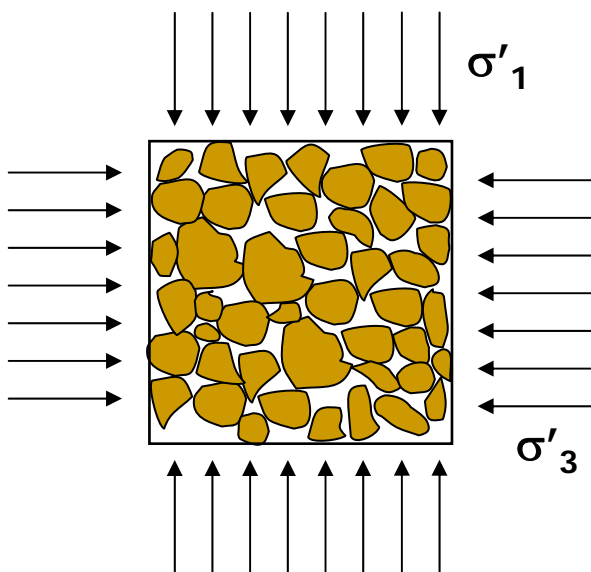
(compressibilità)



Compressione edometrica

$$\sigma'_2 = \sigma'_3 \neq 0 ; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

(compressibilità)

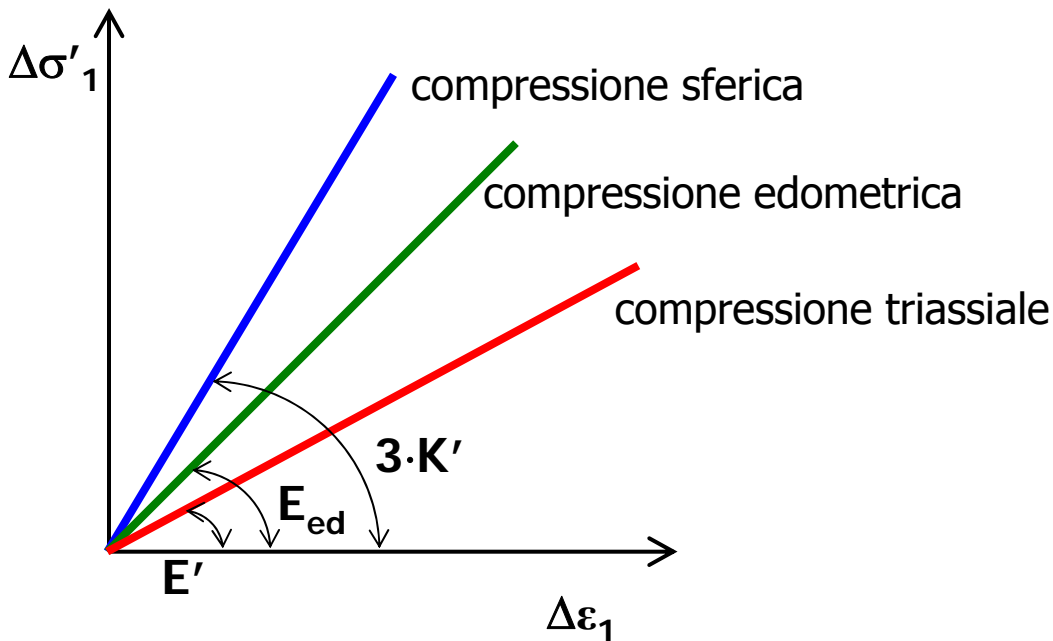


Compressione triassiale drenata

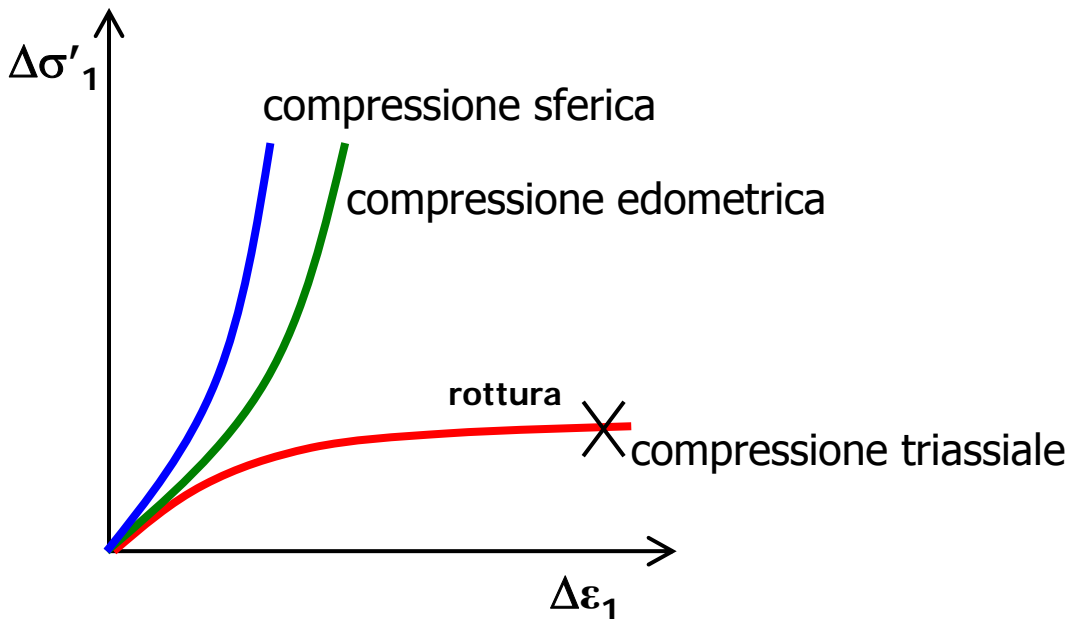
$$\sigma'_2 = \sigma'_3 = \text{cost.}$$

(deformabilità e resistenza)

Mezzo elastico lineare



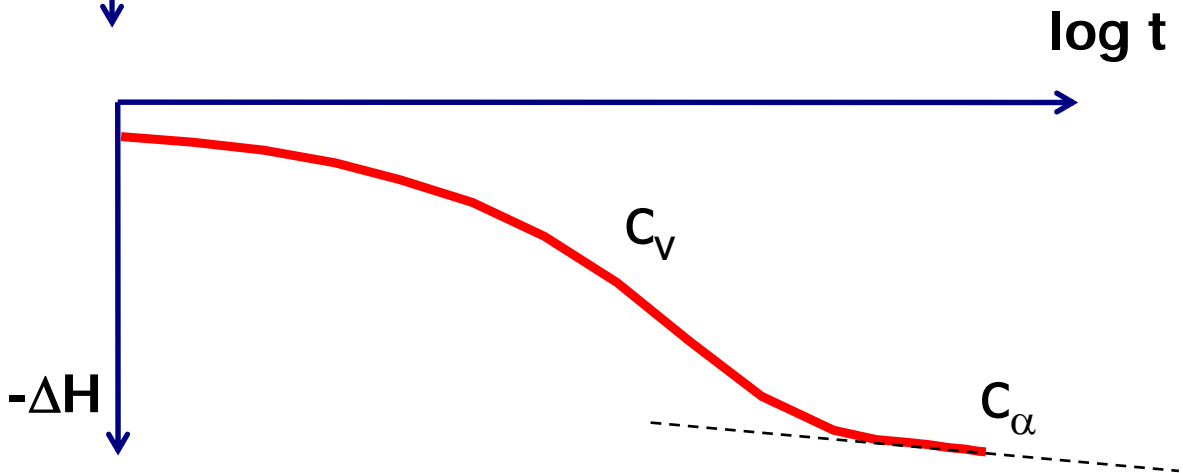
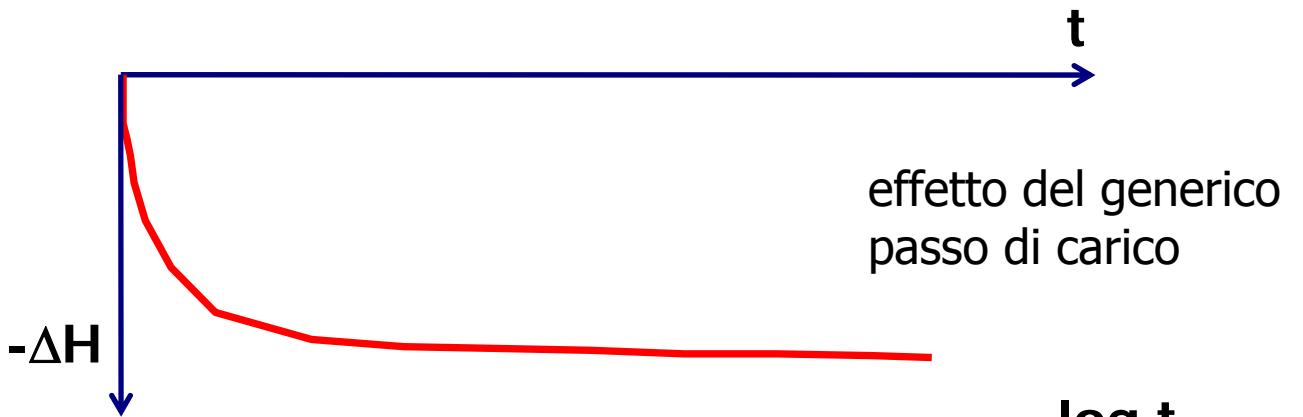
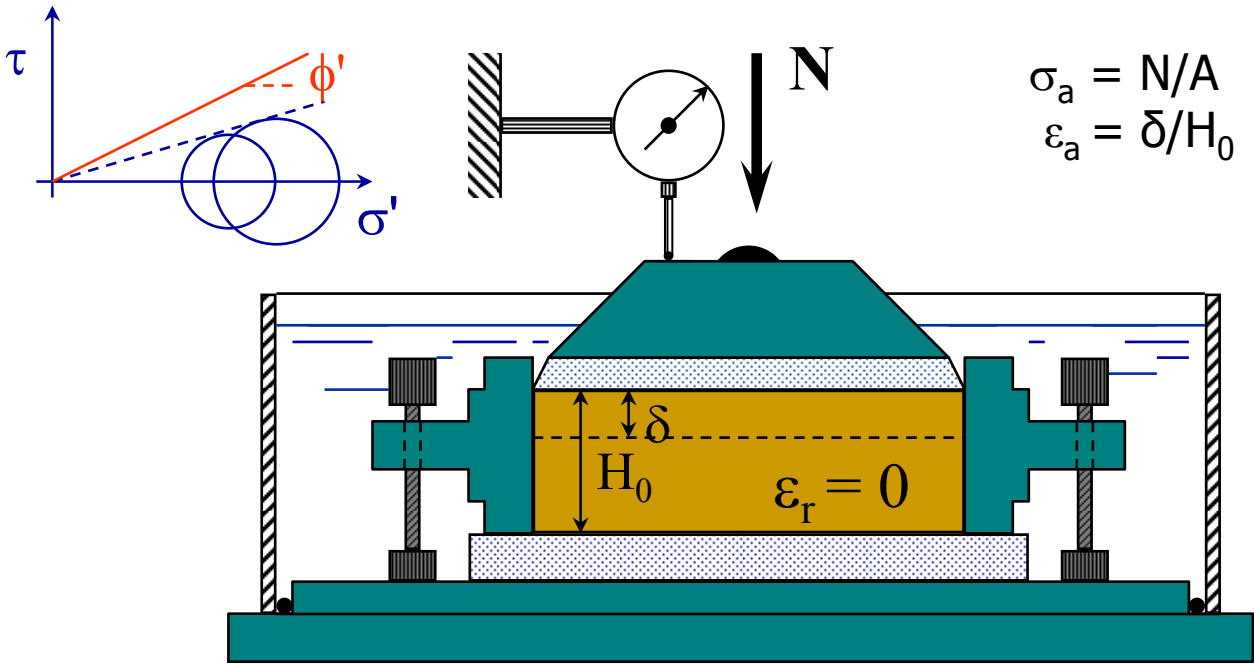
Comportamento rilevato sperimentalmente

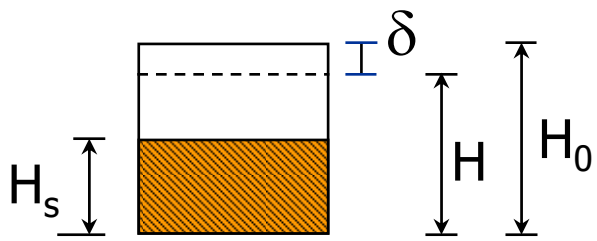
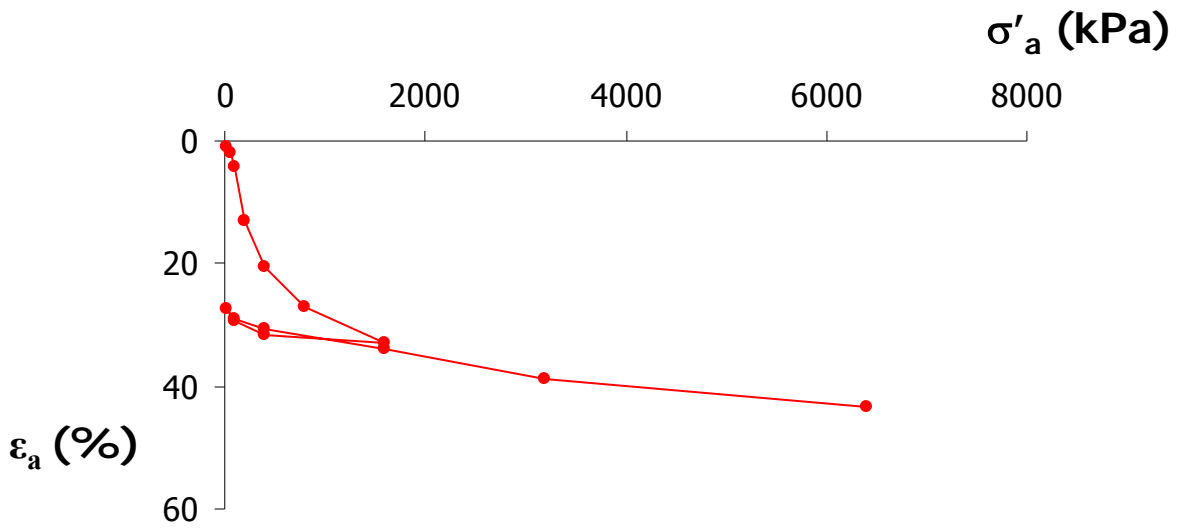


Il comportamento di un terreno non è lineare, inoltre dipende fortemente dal tipo di sollecitazione:

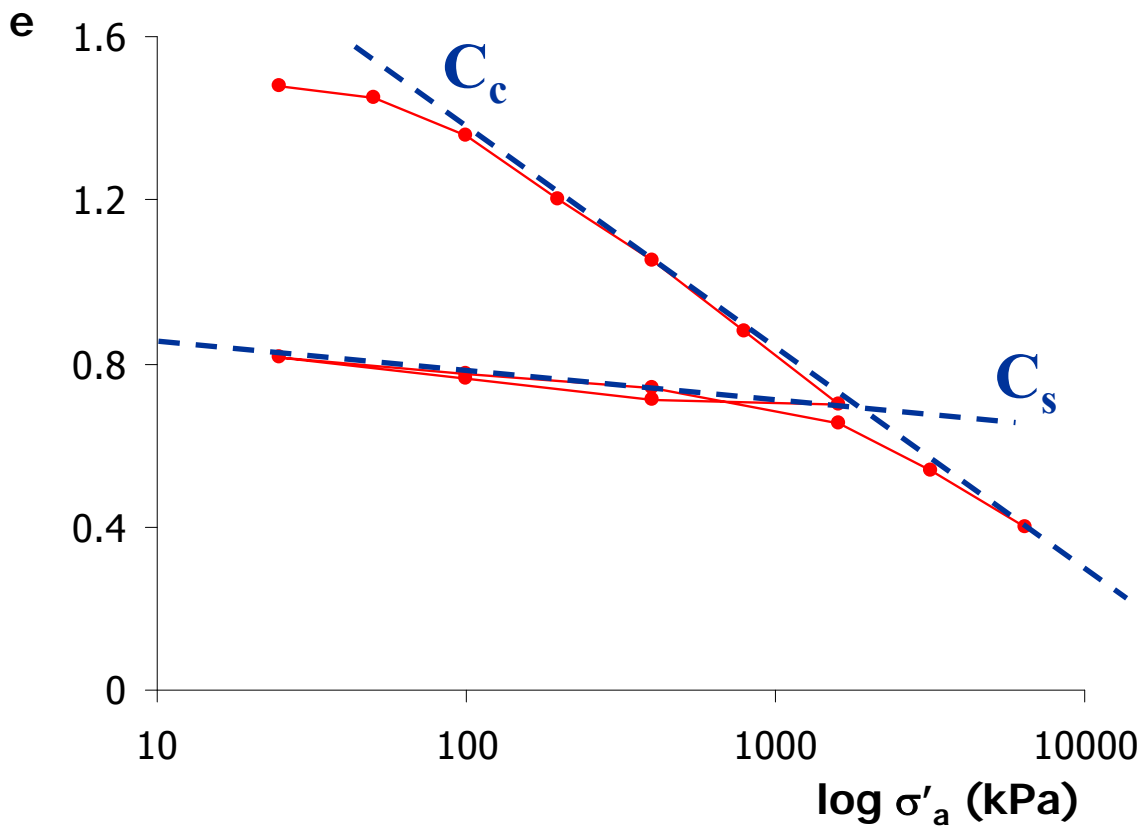
- K' e E_{ed} aumentano al crescere di ε_1
- E' diminuisce al crescere di ε_1

Compressione edometrica





$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{H_v}{H_s} = \frac{H - H_s}{H_s} = \frac{H_0 - \delta - H_s}{H_s}$$

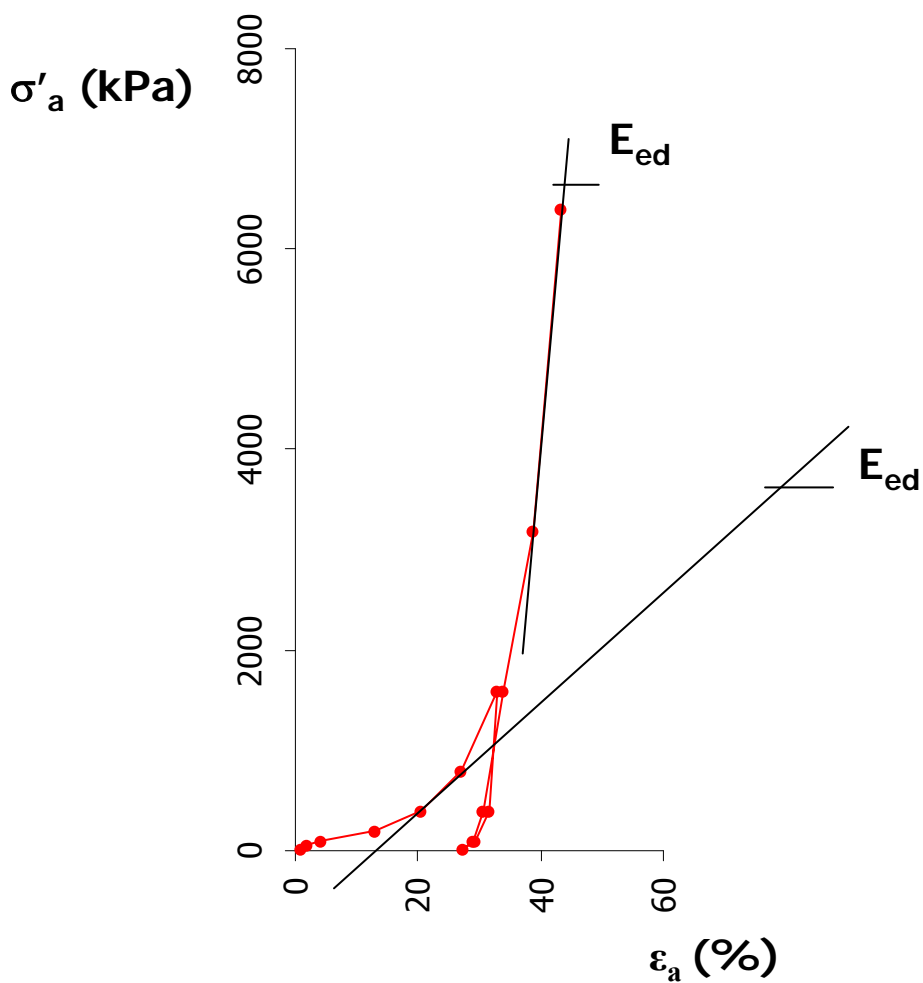


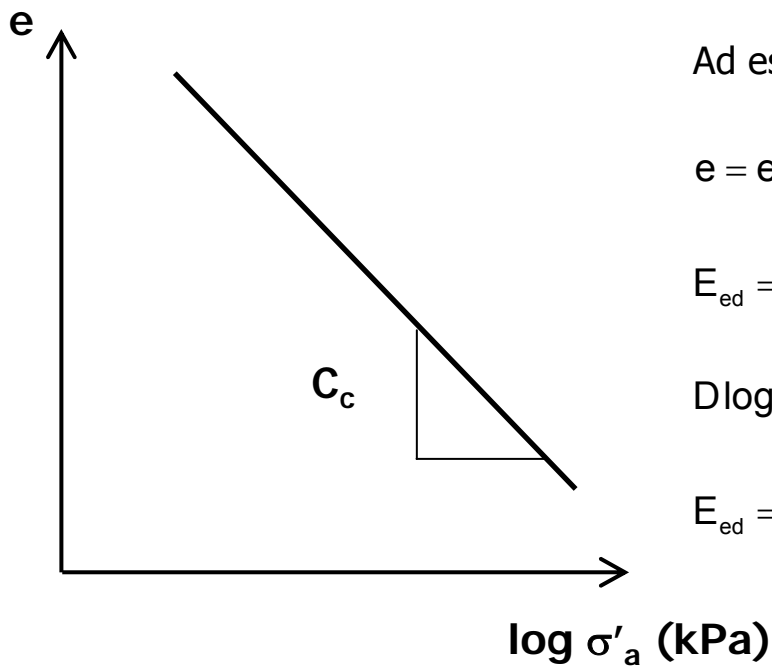
Le deformazioni assiali sono funzione univoca delle variazioni di indice dei vuoti:

$$\varepsilon_a = \frac{\delta}{H_0} = -\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta V_v}{V_0} = -\frac{\Delta V_v}{V_s} \cdot \frac{V_s}{V_0} = -\frac{\Delta V_v}{V_s} \cdot \frac{V_s}{V_{v,0} + V_s} = -\frac{\Delta e}{1 + e_0}$$

Il modulo edometrico si definisce come **modulo tangente**:

$$E_{ed} = \frac{\Delta \sigma'_a}{\Delta \varepsilon_a}$$





Ad esempio, lungo la retta vergine:

$$e = e_0 - C_c \log \frac{\sigma'_a}{\sigma'_0}$$

$$E_{ed} = \frac{d\sigma'_a}{d\varepsilon_a} = -\frac{d\sigma'_a}{de} \cdot (1 + e_0)$$

$$D \log x = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \Rightarrow de = -C_c \frac{1}{\sigma'_a \cdot 2.302} d\sigma'_a$$

$$E_{ed} = 2.302 \frac{\sigma'_a}{C_c} (1 + e_0)$$

Nel caso di terreni molto deformabili si è soliti calcolare il modulo edometrico rapportando le variazioni di altezza del provino alla sua altezza corrente

$$\cancel{E_{ed} = \frac{\Delta\sigma'_a}{-\Delta H/H_0}} \quad \longrightarrow \quad E_{ed} = \frac{\Delta\sigma'_a}{-\Delta H/H}$$

Se si utilizza questa espressione, lungo la retta vergine si ha:

$$E_{ed} = \frac{d\sigma'_a}{d\varepsilon_a} = -\frac{d\sigma'_a}{de} \cdot (1 + e)$$

$$E_{ed} = 2.302 \frac{\sigma'_a}{C_c} (1 + e) = 2.302 \cdot \sigma'_a \cdot \left(\frac{1 + e_0}{C_c} - \log \frac{\sigma'_a}{\sigma'_0} \right)$$

Terreno	E_{ed} (kg/cm ²)	
Torba	1 - 20	aumenta con la consistenza
Argilla	5 - 200	
Limo	30 - 300	
Sabbia	100 - 800	aumenta con la densità relativa
Ghiaia	300 - 2000	

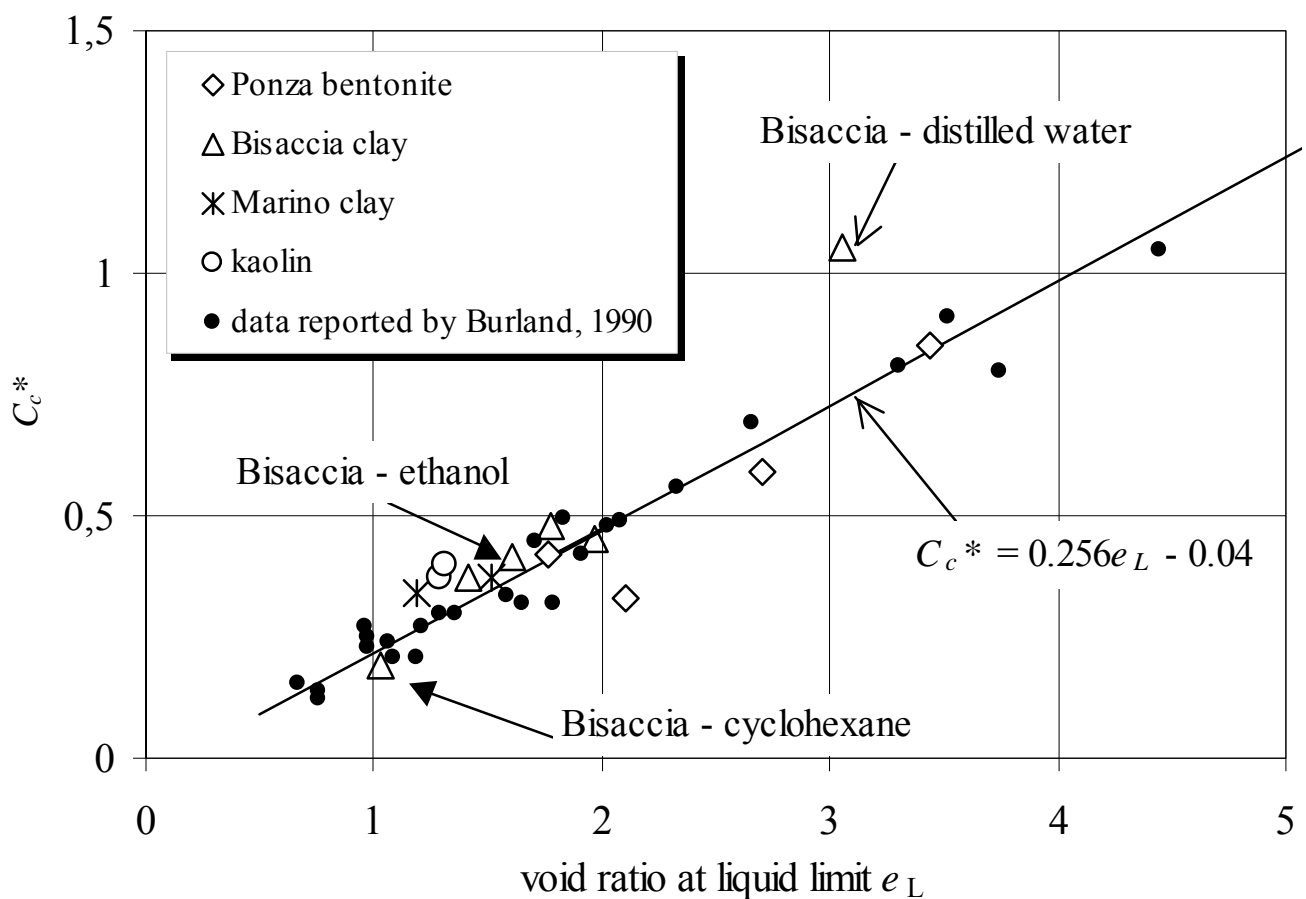
Roccia	E_{ed} (kg/cm ²)
Tufo piroclastico	10'000 - 30'000
Arenaria	200'000 - 300'000
Basalto	400'000 - 500'000
Granito	500'000 - 800'000

Conglomerato cementizio: $E = 200'000 \text{ kg/cm}^2$

Acciaio: $E = 2'000'000 \text{ kg/cm}^2$

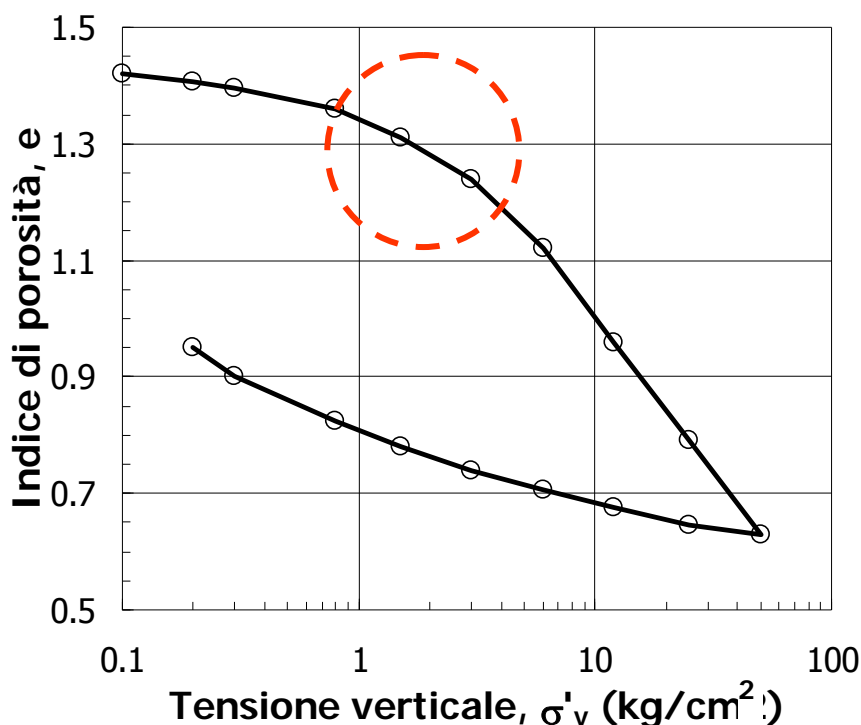
Minerali argillosi	C_c
Montmorillonite	1.6 – 2.6
Illite	0.5 – 1.1
Caolinite	0.19 – 0.28

Per materiali ricostituiti esiste una forte correlazione tra C_c e l'indice dei vuoti al limite liquido

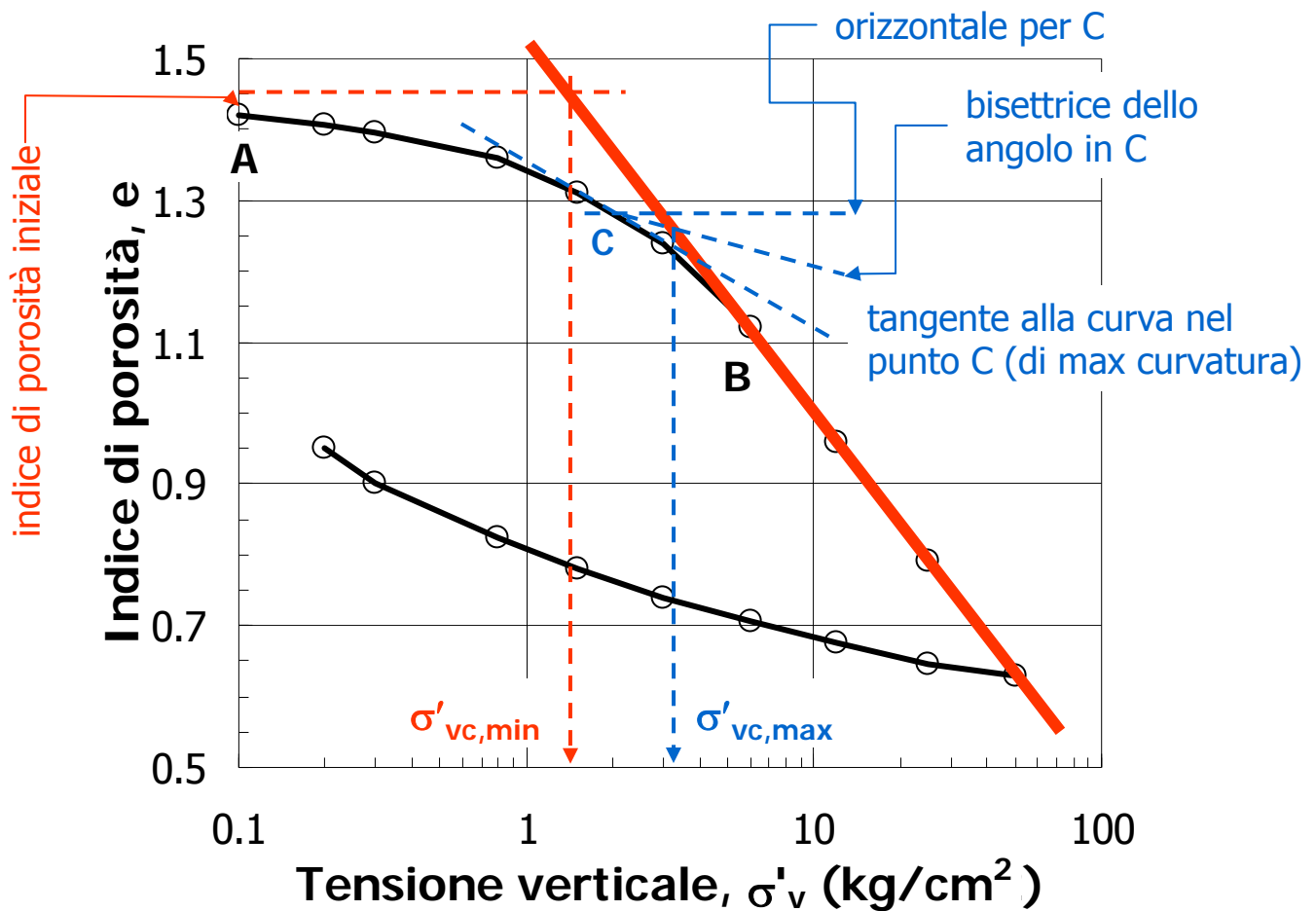


Nel caso delle prove sui materiali naturali, è altamente probabile che i primi valori delle tensioni verticali applicate durante le prove edometriche (qualche frazione di kg/cm^2) siano minori della tensione litostatica alla profondità di prelievo del campione. Pertanto, qualsiasi terreno, sia esso in sito normal-consolidato o sovraconsolidato, ripercorrerà un ramo di ricarica del legame tensione-deformazione.

RICORDANDO CHE LUNGO TALI RAMI LA σ'_{vc} CORRISPONDE AL "GINOCCHIO" DELLA CURVA $e:\sigma'_v$, SI PUÒ QUINDI AFFERMARE CHE ESSA È RAPPRESENTATA DALL'ASCISSE DI UN PUNTO NELLA ZONA EVIDENZIATA IN FIGURA.

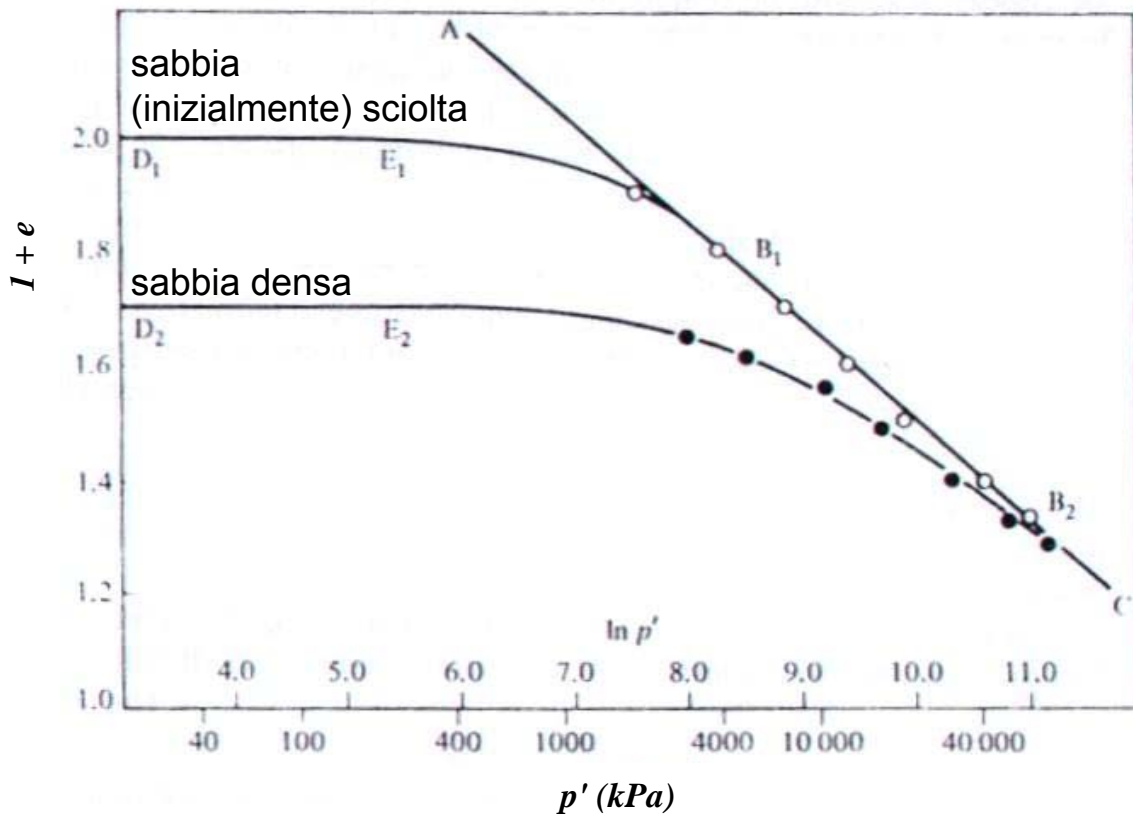


SI DEFINISCE UN INTERVALLO DI POSSIBILI VALORI, MEDIANTE LA COSTRUZIONE INDICATA IN FIGURA



- SE LA TENSIONE LITOSTATICA ALLA PROFONDITÀ DI PRELIEVO DEL CAMPIONE (σ'_v) RICADE NELL'INTERVALLO TROVATO ($OCR=1$) IL TERRENO IN SITO È NORMALMENTE CONSOLIDATO (la minor compressibilità mostrata nel ramo AB è quindi dovuta ai ridotti valori di carico inizialmente imposti nella prova);
- SE LA σ'_v RICADE A SINISTRA DELL'INTERVALLO ($OCR>1$), IL MATERIALE È SOVRACONSOLIDATO (la minor compressibilità nel ramo AB è dovuta sia ai ridotti valori di carico inizialmente imposti nella prova, sia allo stato di sovraconsolidazione in sito).

Compressione isotropa di una sabbia con due diversi valori di densità relativa iniziale



Per una sabbia, nel campo di tensioni che interessa l'ingegneria geotecnica :

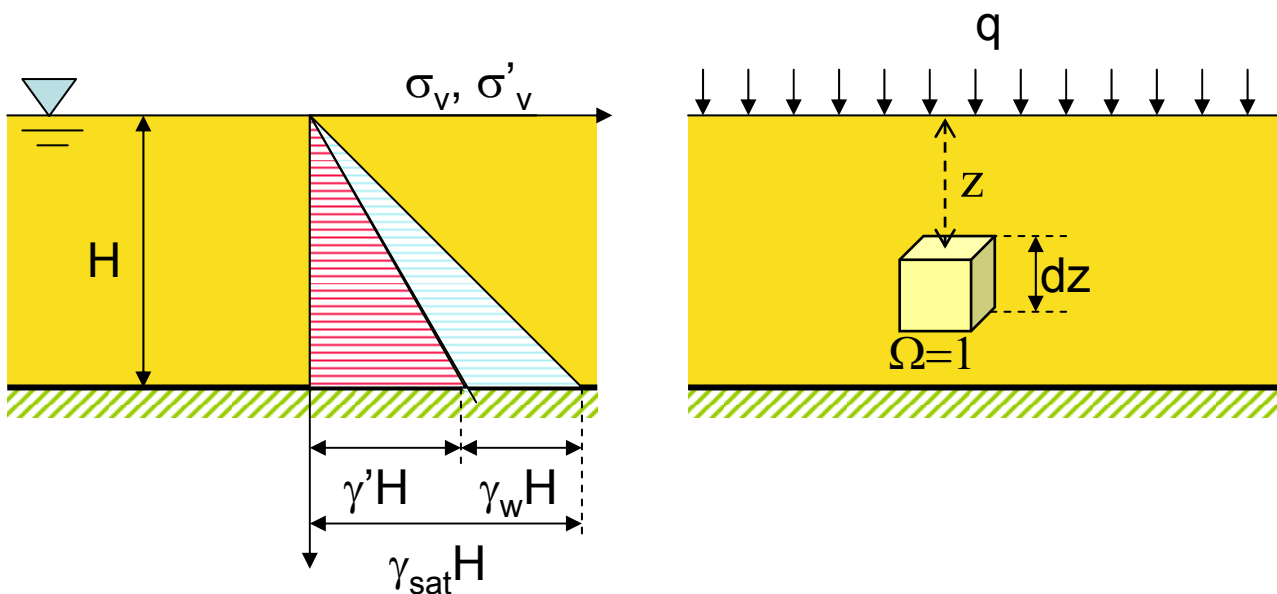
- la compressibilità è di norma molto bassa;
- il punto che nel piano (p', e) rappresenta lo stato corrente giace su un tratto di curva che, per un'argilla, corrisponderebbe a condizioni di sovraconsolidazione.

Dal punto di vista qualitativo, comunque, il comportamento osservato non differisce da quello di un'argilla.

Teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi

Ipotesi:

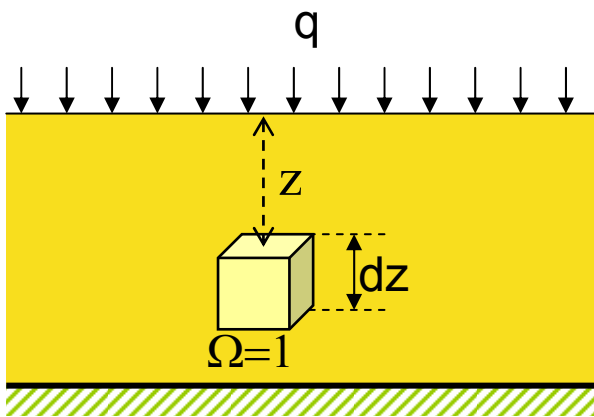
- Terreno saturo
- Particelle solide e acqua incompressibili;
- Regime di piccole deformazioni;
- Validità della legge di Darcy;
- Modulo edometrico e permeabilità costanti;
- Assenza di deformazioni viscosse.



$$\sigma_v = \sigma'_v + u = \gamma_{\text{sat}} \cdot z + q$$

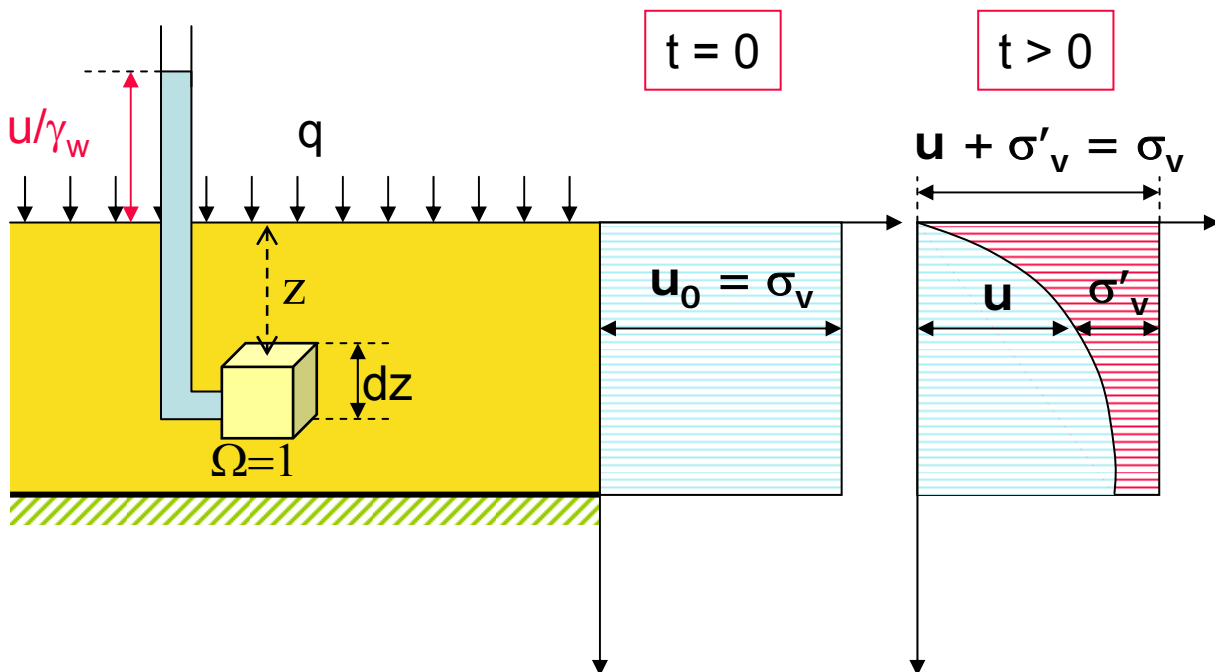
$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad [1]$$

NB: La [1] vale anche per gli incrementi di stato tensionale $\Delta\sigma'$ e Δu indotti dal carico applicato. Per semplicità, da qui in poi si indicano con σ , σ' ed u **gli incrementi di stato tensionale**.



Variazione di volume dell'elemento di terreno nell'intervallo di tempo dt :

$$\frac{1}{E_{ed}} \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} \cdot dt \cdot dz = - \frac{1}{E_{ed}} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \cdot dz$$



Variazione del volume dell'acqua di porosità dell'elemento di terreno nell'intervallo di tempo dt :

$$\text{div}(\vec{q}) \cdot dz \cdot dt$$

$$\text{div}(\vec{q}) = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

$$q_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

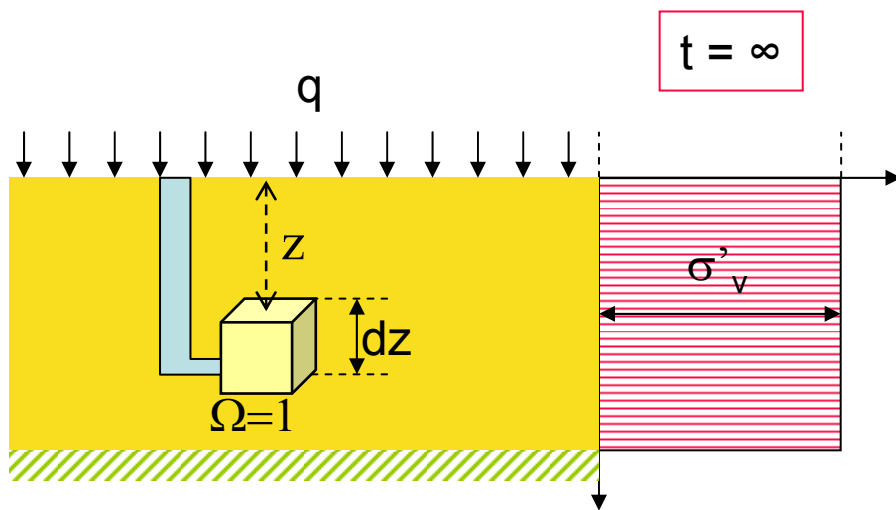
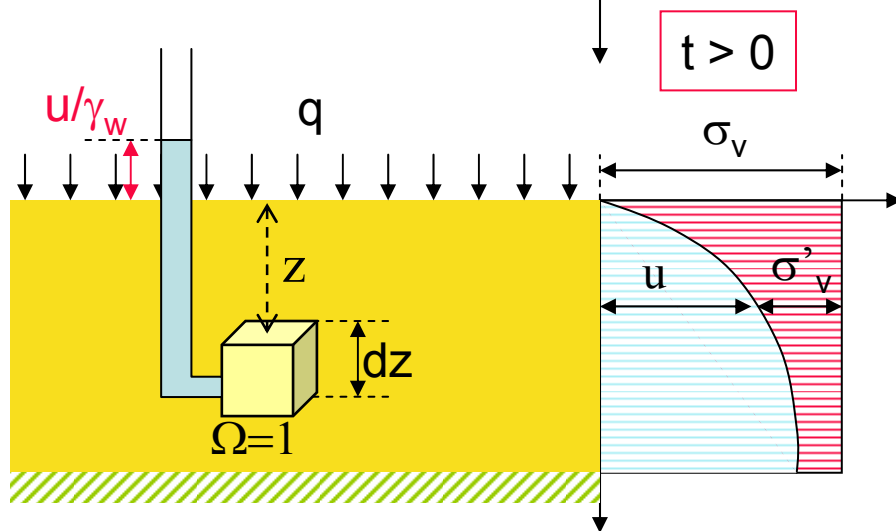
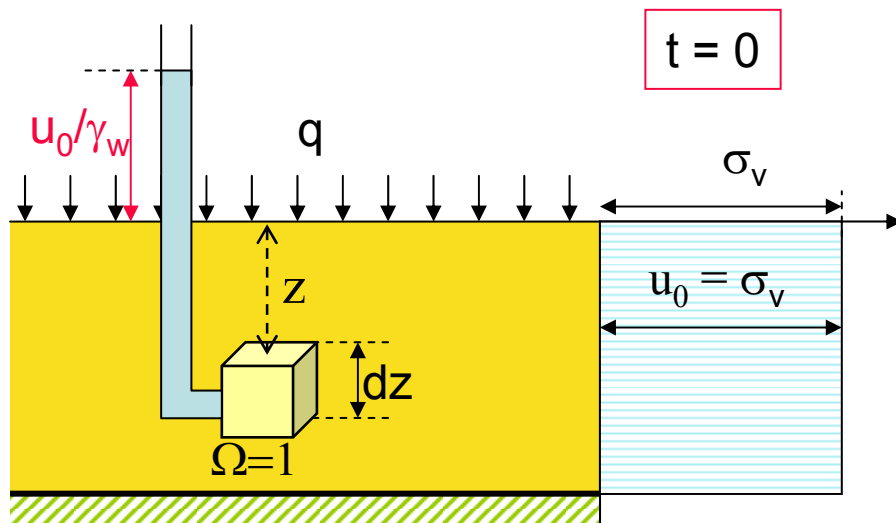
Quindi si ottiene $[\Delta V = \Delta V_w]$:

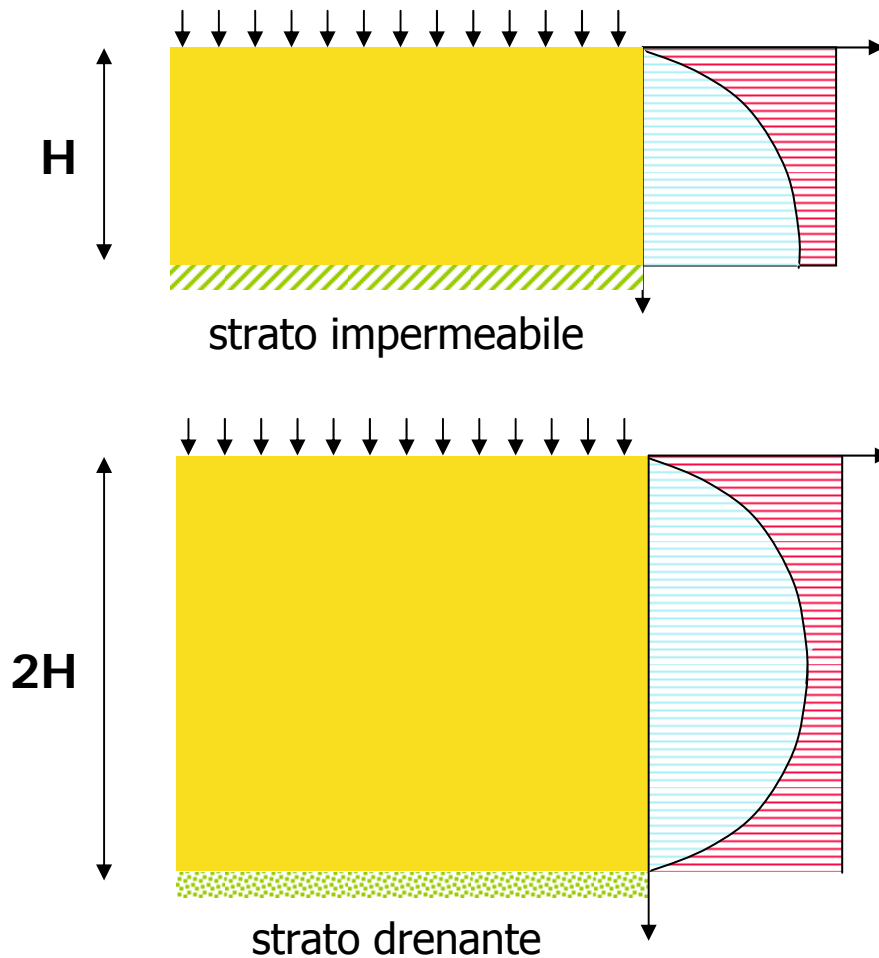
$$-\frac{1}{E_{ed}} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \cdot dz = -\frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot dz \cdot dt$$

da cui, ponendo $c_v = k \cdot E_{ed} / \gamma_w$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(equazione della consolidazione monodimensionale di Terzaghi)





Nel caso di isocrona iniziale rettangolare e con drenaggio alla base e in sommità, esiste una soluzione analitica (che si estende banalmente al caso di drenaggio solo in sommità).

Ponendo $Z = z/H$ e $T = c_v \cdot t/H^2$, ossia adimensionalizzando le variabili spaziale e temporale, l'equazione della consolidazione diviene :

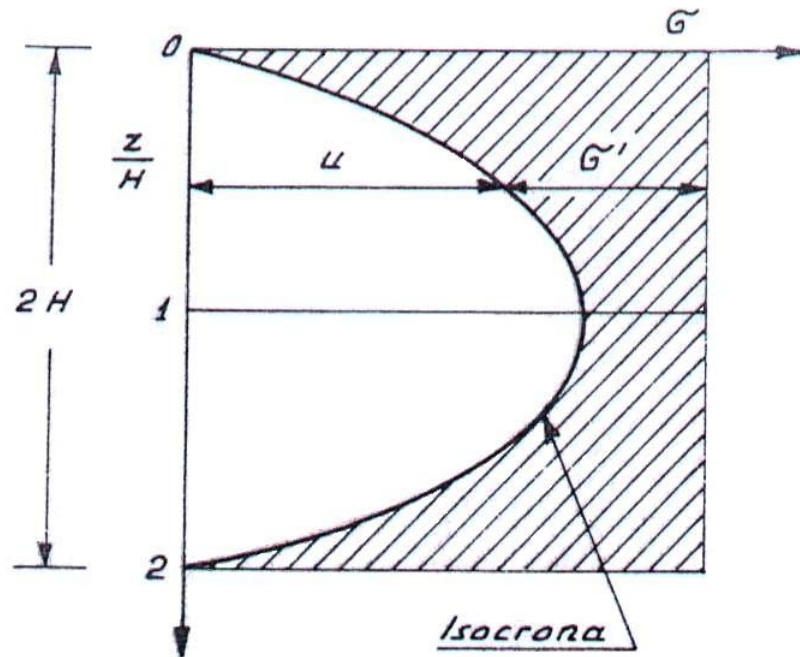
$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$$

con soluzione:

$$u(Z, T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \cdot \text{sen}(M \cdot Z) \cdot e^{-M^2 \cdot T}$$

$$\left[M = \frac{\pi}{2} (2m + 1) \right]$$

Si definisce grado di consolidazione medio U il rapporto tra l'area delle tensioni efficaci σ' e l'area delle tensioni totali σ .



Il grado di consolidazione medio è quindi pari al rapporto tra l'area tratteggiata del diagramma e l'area totale.

$$U = \frac{\int_0^{2H} (\sigma - u) dz}{2 \cdot H \cdot \sigma} = 1 - \frac{\int_0^{2H} u dz}{2 \cdot H \cdot \sigma} = f(T)$$

Sostituendo u con la soluzione indicata si ha:

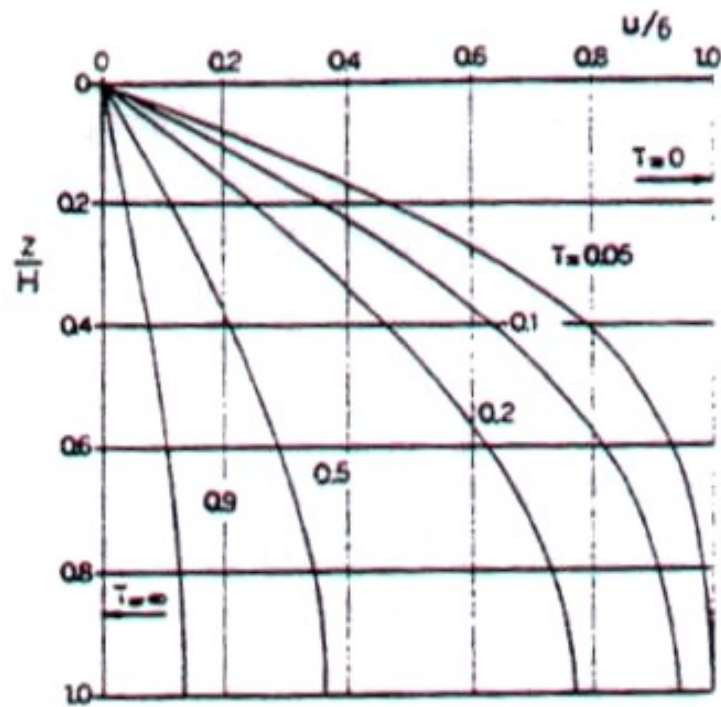
$$U = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \cdot \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} \cdot T\right)$$

È risolto anche il problema dell'andamento dei cedimenti nel tempo:

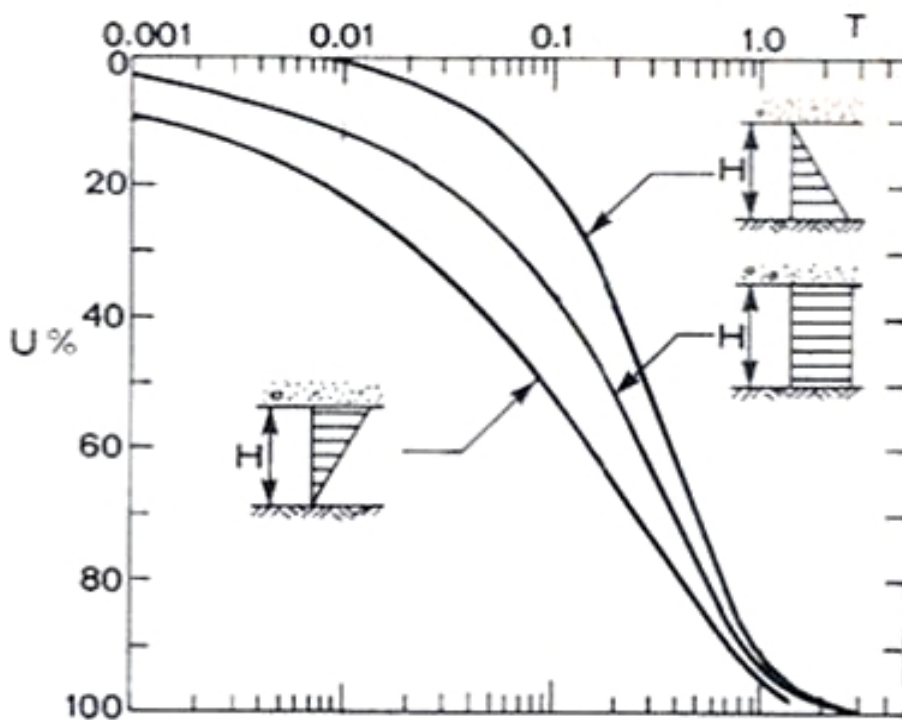
$$w(t) = \frac{1}{E_{ed}} \cdot \int_0^{2H} \sigma' dz = \frac{1}{E_{ed}} \cdot \int_0^{2H} (\sigma - u) dz$$

$$w_{t=\infty} = \frac{1}{E_{ed}} \cdot \int_0^{2H} \sigma'_{t=\infty} dz = \frac{1}{E_{ed}} \cdot \int_0^{2H} \sigma dz = \frac{2 \cdot H \cdot \sigma}{E_{ed}}$$

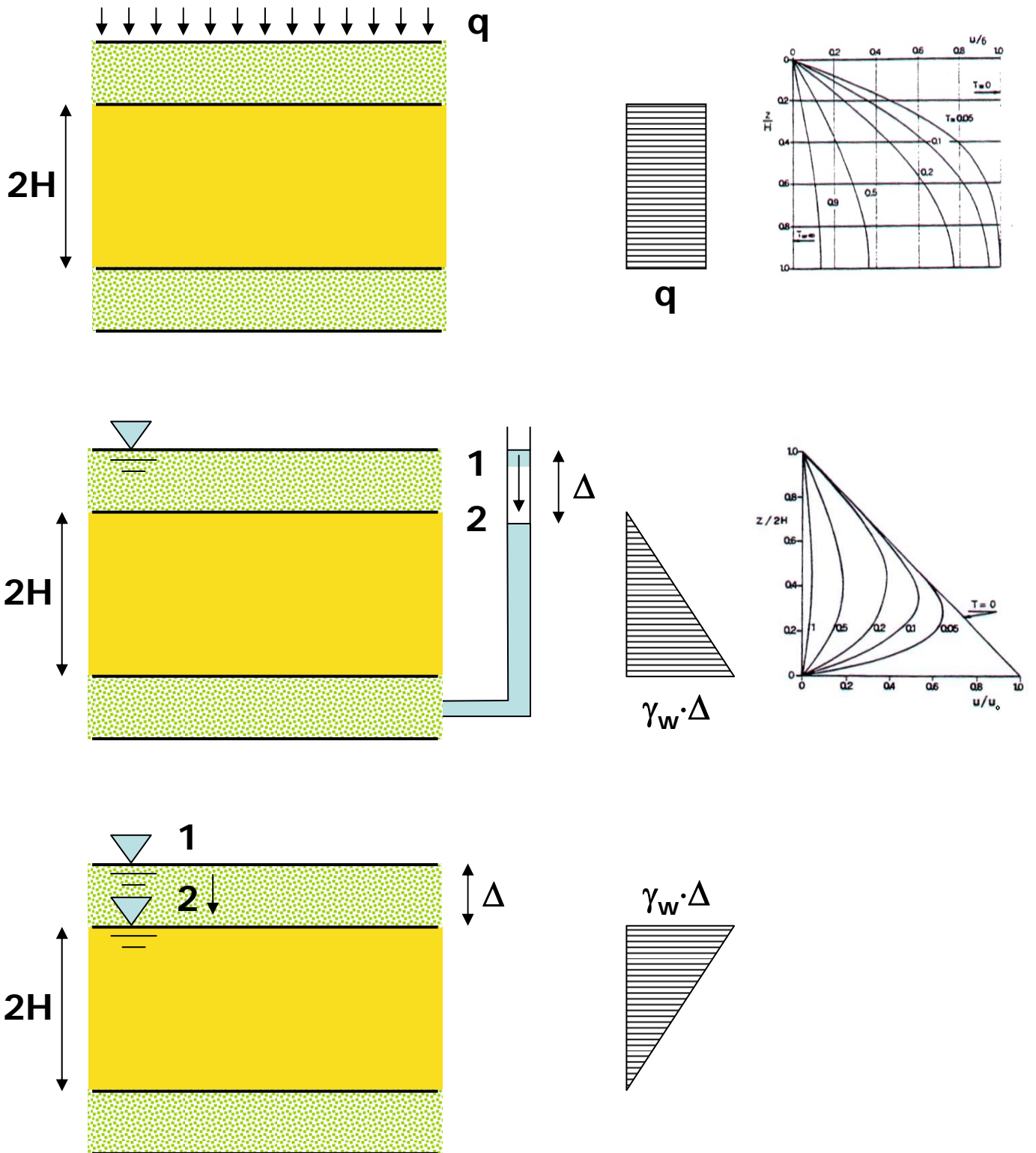
$$\Rightarrow \frac{w(t)}{w_{t=\infty}} \equiv U(t)$$



Soluzione per isocrona iniziale rettangolare e contorno drenante in sommità ed impermeabile alla base : **ad ogni istante T è associata una isocrona.**



Soluzioni per contorno drenante in sommità ed impermeabile alla base: **sono risolti anche i casi di isocrona iniziale triangolare.**



Contorno drenante in sommità ed alla base: si può dimostrare che in termini di $U(T)$ la soluzione di questi tre casi è identica.

Valori tipici del coefficiente di consolidazione c_v (cm²/s)

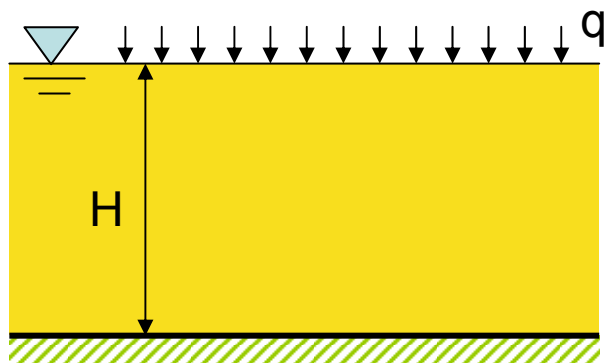
Limite liquido (%)	Ricomprensione	Compressione vergine (indisturbato)	Compressione vergine (rimaneggiato)
30	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
60	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$
100	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$

Esempio

Valutare i tempi di consolidazione di un limo argilloso ($c_v = 1 \cdot 10^{-3}$ cm²/s)

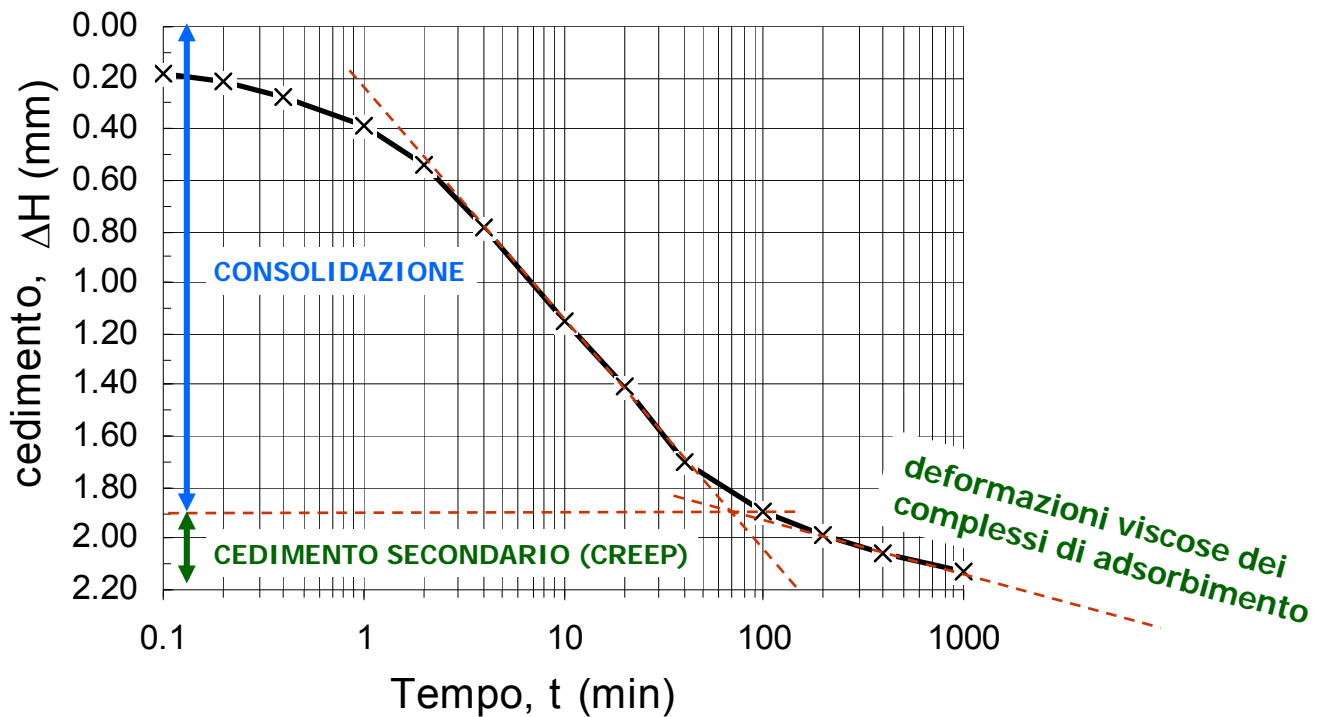
$$T = 1 \Rightarrow U \cong 93\%$$

H (m)	Tempo (giorni)
1	115 ~ 4 mesi
2	463 ~ 15 mesi
3	1035 ~ 3 anni
4	1840 ~ 5 anni



Si considerino nuovamente, alla luce della teoria della consolidazione, **i risultati di una prova edometrica.**

Nonostante le condizioni di flusso e deformazione monodimensionali imposte, per la presenza di deformazioni a tensioni efficaci costanti **i terreni hanno comportamento più articolato rispetto a ciò che prevede la teoria della consolidazione.**



[qui, si sta indicando con ΔH la variazione di altezza del provino in valore assoluto]

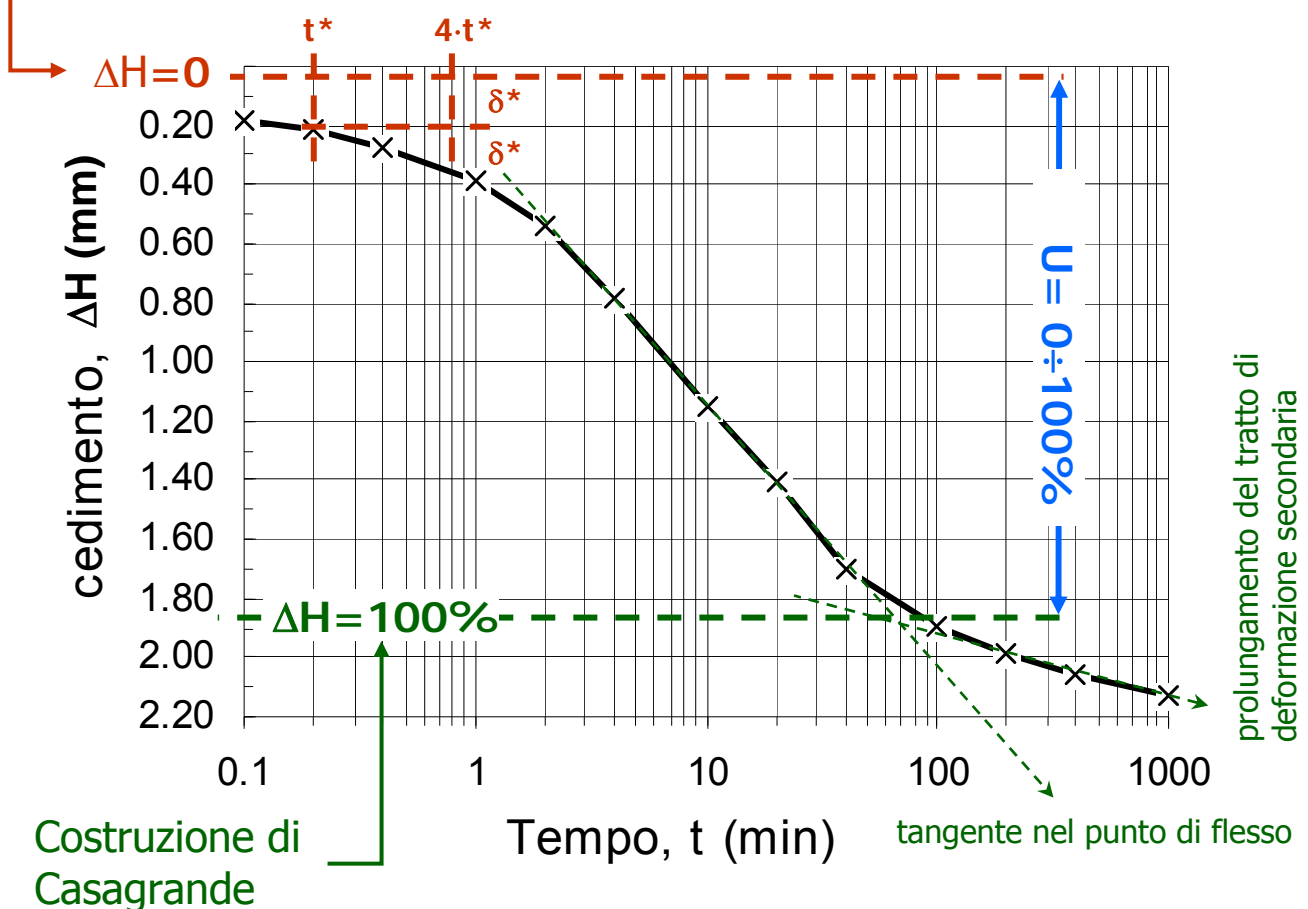
Determinazione di c_v dai risultati di una prova edometrica

Per determinare c_v si sfrutta la relazione teorica tra il fattore di tempo T ed il tempo fisico t , ossia: $T = c_v \cdot t / H^2$

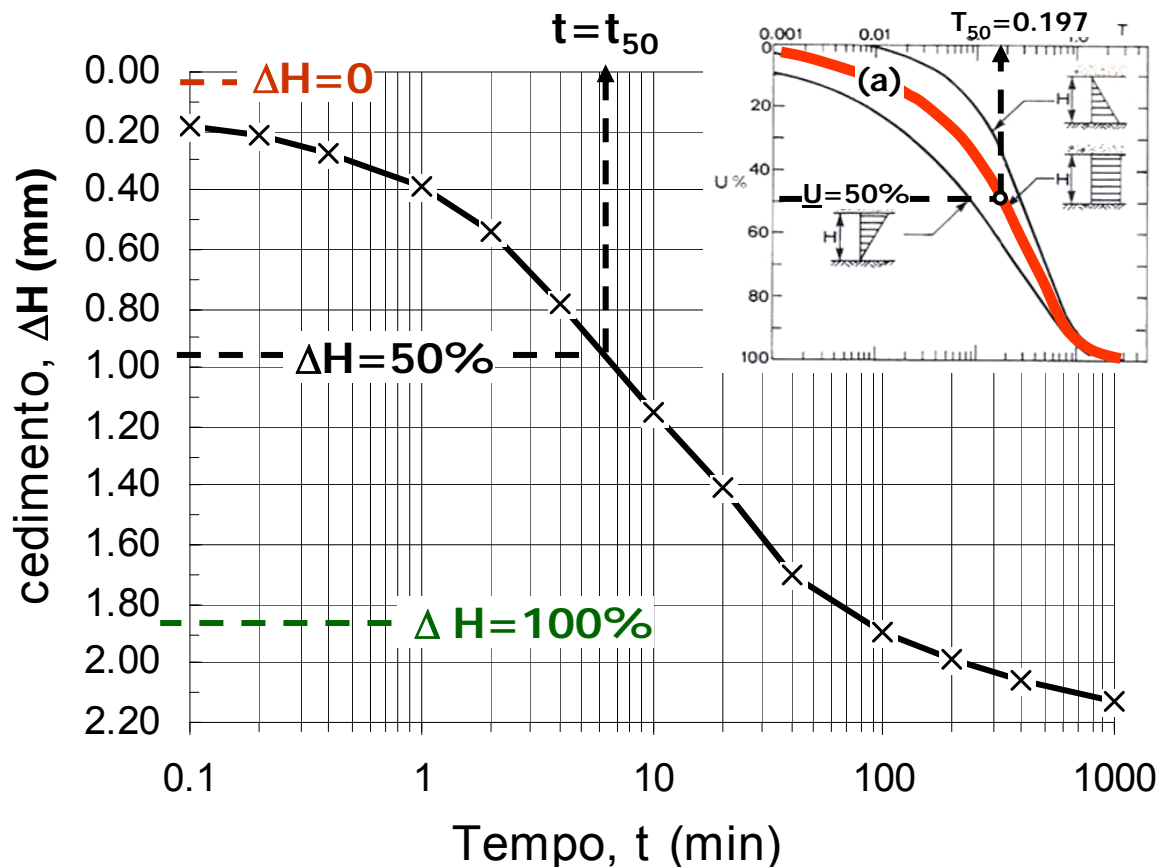
Ricordando che $U = \Delta H(t) / \Delta H_c$, si "sovrappone" la curva sperimentale $\Delta H : t$ con quella teorica $U : T$, dopo avere corretto la prima per:

- eliminare gli errori sub-sperimentali che portano ad avere un $\Delta H(t=0) > 0$ nella prova (p.e., contatto scabro tra provino e piastra porosa, deformazioni delle parti meccaniche, ...);
- eliminare il cedimento secondario.

Per $U \leq 60\%$ la curva (a) di Terzaghi è ben interpolata dalla relazione $U = \sqrt{(4 \cdot T / \pi)}$: se t quadruplica ΔH raddoppia



Depurata la curva sperimentale $\delta:t$ dagli errori **sub-sperimentali** e dal **cedimento secondario**, è possibile individuare il tempo t_{50} , in corrispondenza del quale è stato raggiunto il 50% di consolidazione nel passo della prova edometrica preso in considerazione:



È quindi possibile imporre la condizione:

$$T_{50} = \frac{c_v \cdot t_{50}}{(H^*)^2} \Rightarrow c_v = \frac{T_{50} \cdot (H^*)^2}{t_{50}}$$

dove T_{50} ($=0.197$) è il **valore teorico** corrispondente ad $U=50\%$ sulla **curva (a)** ed H^* è il **percorso di drenaggio** nella **prova sperimentale** (in un edometro doppiamente drenato pari a metà spessore del provino).